جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثانية – الفصل الدراسي الثاني

2017-2018

المعادلات التفاضلية (2)

المحاضرة النظرية الأولى

تتوافر هذه المحاضرة ورقياً بمكتبة تشرين بالنفق الرئيسي لجامعة البعث

و تتوافر الكترونياً بموقع : Math – is best لطلاب قسم الرياضيات بجامعة البعث

إعداد : داني محفوض

مقدمة المادة ......

وُضِعَ مُقرَّر المعادلات التفاضلية(2) لطلاب السنة الثانية بالفصل الدراسي الثاني , لنكمل بهِ مسيرتنا في موضوع نظرية المعادلات التفاضلية , حيثُ أصبح مع نهاية القرن الثامن عشر وحداً من اهمم فروع الرياضيات , و مادة أساسية في العلوم الرياضية و الفيزيائية .... ندرس في هذا المقرر أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n , حيثُ تعتبر هذه المعادلات واحدة ممن أكثر الفروع أهميَّة في نظرية المعادلات التفاضلية و و يرجع ذلك إلى الإمكانات الواسعة لتطبيقاتها في الفيزياء وَ الميكانيكا .

المراجع المتوافرة لهذه المادة :

- المعادلات التفاضلية (الجزء الثاني) , جامعة البعث , للدكتور كثرة مخول .
- المعادلات التفاضلية (الجزء الثاني) , جامعة حلب , للدكتور شحادة ....
- المعادلات التفاضلية , سلسة سيشوم .
- كتاب مسائل في المعادلات التفاضلية ....

مفردات المنهج :

- الفصل الأول : النظرية العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n .
- الفصل الثاني : المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n و ذات المعاملات الثابتة .
- الفصل الثالث : المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة و التي ترد إلى معادلات تفاضلية ذات معاملات ثابتة .
- الفصل الرابع : إيجاد حلول المعادلات التفاضلية على هيئة متسلسلات قوى .
- الفصل الخامس : جمل المعادلات التفاضلية الخطية .
- الفصل السادس : المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى و طرق حلها .

سنبدأ في هذه المحاضرة بدراسة الفصل الأوَّل

(النظريَّة العامة للمعادلات التفاضلية من المرتبة من المرتبة الخطية من المرتبة n)

مفردات المحاضرة الأولى :

أولاً : مراجعة سريعة لمفهوم المعادلة التفاضلية , و مفهوم درجة و رتبة المعادلة التفاضلية .

ثانياً : مفهوم المعادلة التفاضلية الخطيَّة من المرتبة n , و مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات المعاملات الثابتة , مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات المعاملات المُتغيِّرة .

ثالثاً : دراسة بعض الأمثلة على ما سبق .

رابعاً : مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة , و مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة .

لنبدأ ....

أولاً : مراجعة لمفهوم المعادلة التفاضلية و درجة و رتبة المعادلة التفاضلية :

مفهوم المعادلة التفاضلية : (المعادلة التفاضلية **العادية** – المعادلة التفاضلية **الكلية** – المعادلة التفاضلية **الجزئيّة**) :

- **المعادلة التفاضلية العادية :** هي علاقة بين دالة y و متحول مستقل x , و مشتقات الدالة y بالنسبة للمتحوّل المستقل x , أي منَ الشّكل

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots\dots\dots, y^{(n)}, \dots\dots\dots) = 0 \quad \dots(1)$$

- **المعادلة التفاضلية الكلية (أي ذات التفاضلات الكاملة) :** و هي علاقة تربط دالتين x وَ z أو أكثر , و متحول مستقل x , و تفاضلات هذهِ الدوال بالنسبة للمتحوّلِ المستقل x , أي علاقة من الشكل :

$$f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz = 0$$

- **المعادلة التفاضلية الجزئية :** هي علاقة بينَ دالة u و عدة متحولات مستقلة x وَ y وَ z , أي علاقة من الشكل التالي : $\delta\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial x \partial y}, \dots\dots\dots\dots\dots\right) = 0$.

رتبة و درجة المعادلة التفاضلية المعادلة التفاضلية :

- **رتبة المعادلة التفاضلية العادية :** تُسمَّى مرتبة أعلى مشتقة داخلة في المعادلة التفاضلية للدالة المطلوب تعيينها بمرتبة المعادلة التفاضلية , و على هذا نكتب المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة n على الشَّكل التالي:

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots\dots\dots\dots, y^{(n)}) = 0 \quad \dots(2)$$

- **درجة المعادلة التفاضلية العادية :** درجة المعادلة التفاضلية , هيَ أعلى درجة لأعلى مرتبة اشتقاق تحتويها المعادلة التفاضليَّة .

ثانياً : مفهوم المعادلة التفاضلية الخطيَّة من المرتبة n , و مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات المعاملات الثابتة , مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات المعاملات المُتغيِّرة :

- **مفهوم المعادلة التفاضلية العادية الخطية من المرتبة n :** نقول عن معادلة تفاضلية من المرتبة n أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n إذا و فقط إذا ظهر المتغير التابع y و المشتقات العليا لهذا التابع (y) فُرادى (أي دون حواصل ضرب) , و كلٍ مرفوع للأُس واحد , أي الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من

$$\dots (3) p_n(x).y^n + p_{n-1}(x).y^{n-1} + p_{n-2}(x).y^{n-2} + \dots + p_1(x).y' + p_0(x).y = F(x)$$

- **مفهوم المعادلة التفاضلية العادية الخطية من المرتبة n ذات المعاملات الثابتة :** إذا كانت الدَّوال المعاملات $p_n(x)$ وَ $p_{n-1}(x)$ وَ ......وَ $p_{n-2}(x)$ وَ $p_1(x)$ وَ $p_0(x)$ جميعها هيَ ثوابت عدديَّة (دوال ثابتة) عندئذٍ تدعى المعادلة **(3)** معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n ذات معاملات ثابتة .

- **مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات المعاملات المتغيِّرة :** إذا كانت إحدى الدَّوال المعاملات $p_n(x)$ وَ $p_{n-1}(x)$ وَ ......وَ $p_{n-2}(x)$ وَ $p_1(x)$ وَ $p_0(x)$ على الأقل هيَ دالة تتعلَّق بالمتحوِّل x عندئذٍ تدعى المعادلة **(3)** معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n ذات معاملات متغيِّرة .

ثالِثاً : دراسة بعض الأمثلة على ما سبق (أولاً وَ ثانياً) :

$y'^2 - 4y' + 3y = 0$: هذهِ معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى و من الدرجة الثانية .

$y'' - xy' - 2x = 0$: هذهِ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية و من الدرجة الأولى .

$y''^2 - 3xy' - 2xy = 0$: هذهِ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية و من الدرجة الثانية .

هذه الأمثلة الثلاث عن رتبة و درجة المعادلة التفاضلية ...

ندرس الآن أمثلة عن المعادلة التفاضلية الخطية : ...

ملاحظة : .... انتبه !!
y^n : تعني أنَّ y مرفوعة للأس n , فمثلاً : $y^3 = y \times y \times y$
بينما : ... $y^{(n)}$: تعني أنَّ y مُشتَقَّة n مرَّة , فمثلاً : $y^{(3)} = y'''$

$y'' + xyy' = \sin x$: هذهِ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية غير خطية لوجود الجداء xyy' فيها .

$y''' - y'^2 = 0$: معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة غير خطية بسبب وجود الدالة y' مرفوعة للأس 2 .

$y''' + 8y'' + 6y' + y = 0$: معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة خطية ذات معاملات ثابتة .

$x^2y'' + 2xy' + y = x^3$: هذهِ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية خطية ذات معاملات متغيرة .

$y'' + x.\sin y = e^x$: هذهِ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية غير خطية لوجود دالة غير خطية فيها هي $\sin y$

$x(1 - \ln x).y'' + x.y' + (1 - \ln x).y = (1 - \ln x)^2$: هذهِ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية خطية ذات معاملات متغيرة .

رَابِعاً : مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة , و مفهوم المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة .

- **مفهوم المعادلة التفاضلية المتجانسة :** نفرض أن الدوال في المعادلة :

$$\dots \quad (3) p_n(x).y^n + p_{n-1}(x).y^{n-1} + p_{n-2}(x).y^{n-2} + \dots + p_1(x).y' + p_0(x).y = f(x)$$

هي دوال مستمرة على المجال : $I = (a, b)$, و بفرض أن $p_n(x) \neq 0$ و ذلك مهما كانت x من I ,
عندئذ تكتب المعادلة **(3)** على الصورة الآتية :

$$\dots \quad (4)\ y^n + a_{n-1}(x).y^{n-1} + a_{n-2}(x).y^{n-2} + \dots + a(ax).y' + a(x).y = F(x)$$

حيث أن : $F(x) = \frac{f(x)}{p_n(x)}$ وَ ... $a_j = \frac{p_j(x)}{p_n(x)}$; $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots\dots$

و الآن إذا كانت $F(x) \equiv 0$ (أي تطابق الصفر) عندئذٍ سوفَ تكتب المعادلة **(4)** بالشكل :

$$\dots \quad (5)\ y^n + a_{n-1}(x).y^{n-1} + a_{n-2}(x).y^{n-2} + \dots + a(x).y' + a(x).y = 0$$

نسمي المعادلة **(5)** المعادلة التفاضلية الخطية **المتجانسة** المناظرة للمعادلة **(4)** .

- **مفهوم المعادلة التفاضلية الغير متجانسة :** إذا كانت $F(x) \not\equiv 0$ (أي لا تطابق الصفر) , حينها ندعو المعادلة التفاضلية أنها معادلة تفاضلية غير متجانسة , أي إذا كان $F(x) \not\equiv 0$ فنقول أنَّ المعادلة **(5)** التالية أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n غير متجانسة :

نتوقَّف .. هنا .. في هذه المحاضرة ..

وَ .. نكمل .. في المحاضرة القادمة .. **(** خواص المعادلات التفاضلية الخطية – و سندرس موجز في الساحة العقدية و ذلك لشدة أهمية هذا الموضوع في مادة المعادلات التفاضلية(2) .. **)**

انتهت المحاضرة النظرية الأولى ....

إعداد : داني محفوض .... **ملاحظة : تتم عنونة هذه المحاضرات وفقاً لما يتم إعطاؤه بالشعبة الأولى ..**